2.2 Das Prinzip der pyramidalen Lastabtragung als Pendant zur perpendikularen Lastabtragung.

2.2.1 Die perpendikulare Lastabtragung.

Den in Sachsen wirkenden Baumeistern des Barock war es allgeläufig, daß Lasten einer lotrechten (perpendikularen) Linie gemäß hin zum Erdmittelpunkt verlaufen. Den Terminus der perpendikularen Linie definiert JACOB LEOPOLD, indem er schreibt: *„… Eine* Perpendicular-*Linie, oder Senck-rechte Linie, ist bey der* Mechanic *eine gerade Linie, die ein freyfallender Cörper, oder eine Schnur mit angehangenen Gewicht, und die Werckleuthe eine Bley-Schnur, senck-Bley oder Loth nennen, allemahl gegen das* Centrum *der Erden machet, und auf der* Horizontal-*Linie zu gleichen Winckel auffstehet; …“*.[1] Gebäude, die diesem Prinzip der Lastabtragung folgen, wurden *„… perpenticular auff geführet …“*[2] genannt. Nach diesem Prinzip wurde die überwiegende Mehrheit aller Gebäude errichtet. Bei diesen Bauwerken werden die Lasten aus raumüberdeckenden Bauteilen[3] wie Dächern und Geschoßdecken über längskraftbeanspruchte Stabwerke[4] oder über biegebeanspruchte Balken zu deren Auflagern über Pfeilern, Säulen und Wänden geführt und dort lotrecht über diese in die Fundamente abgeleitet[5]. Voraussetzung dafür ist, daß diese lastableitenden lotrechten Bauteile derart steifigkeitsbelegt sind, so daß sie diese Lasten auch aufnehmen können. Werden diese Bauteile perforiert, so müssen Balken (Stürze) oder Bögen die Lasten über den Öffnungen abfangen und umleiten.

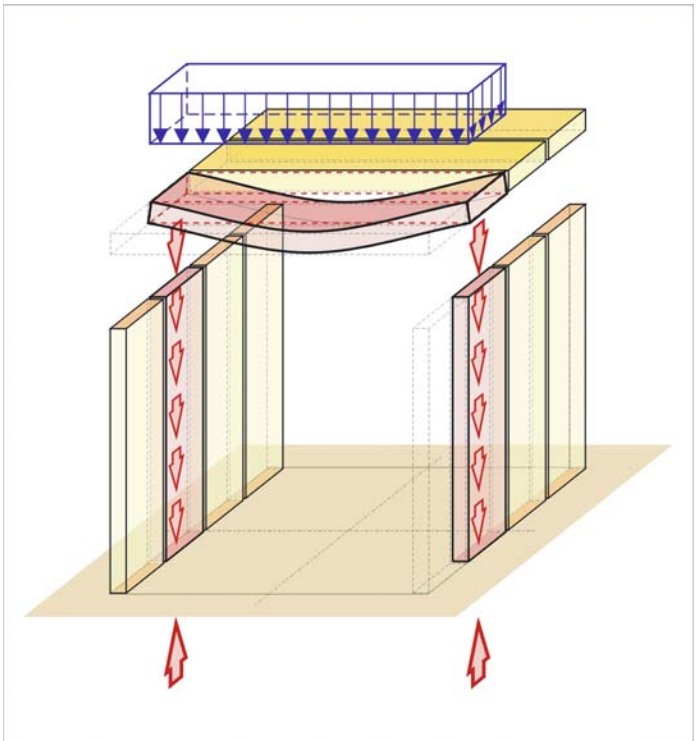


Bild 2.2.1: Prinzip der perpendikularen Lastabtragung.

2.2.2 Die pyramidale Lastabtragung

1 Vgl. Leopold, 1724, S. 6.
2 So beschreibt beispielsweise GEORGE BÄHR in seinem Gutachten vom 4. August 1733 das Prinzip der perpendikularen Lastabtragung, zitiert nach Sponsel, 1893, S.94, vgl. auch Anhang A.6.
3 Vgl. Abschnitt 2.3.
4 Strebenwerke, vgl. auch Abschnitt 2.4.

Die pyramidale Lastabtragung hingegen, deren Wesensmerkmale bereits in einigen bautheoretischen Schriften aus der Zeit vor GEORGE BÄHR einen wichtigen Punkt in den dortigen Erörterungen darstellte[6], allerdings aber nur für spezielle Anwendungen vorbehalten blieb, soll mit der folgenden Modellüberlegung erläutert werden.

Vorausgesetzt werde eine auf einer waagerechten Ebene stehende Pyramide mit quadratischem Grundriß, die entgegen ihrer Vorbilder des Ägypterlandes in ihrem Inneren hohl sei. Ferner gelte für die Stärke der Mantelflächen (t), daß diese bezüglich der sonstigen geometrischen Abmessungen wie der Höhe der Pyramide (h) und der Grundrißkantenlänge (d) sehr klein sei.[7] Die anzustellende Überlegung setzt allerdings voraus, daß das Verhältnis zwischen der Höhe (h) der Pyramide und Grundrißkantenlänge (d) deutlich von den Werten unendlich und Null entfernt liegen soll, so daß für die Neigung der Pyramidenseitenflächen ein Winkel zur Horizontalen (α) nahe 0° und nahe 90° ausgeschlossen[8] werden kann.

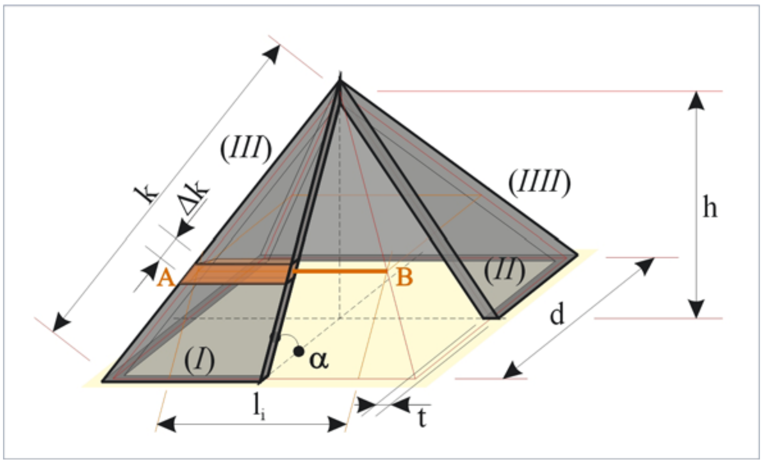


Bild 2.2.2: Geometrie einer Pyramide zur Modellüberlegung zu dem Prinzip der pyramidalen Lastabtragung.

Gedanklich zerlege man nun eine Seitenfläche in viele parallel zur Grundkante der Pyramide liegende linienförmige Elemente (A_i, B_i) mit den Abmessungen und Eigenschaften (l_i), (t) und (Δk). Ein solches Element wird im folgenden einer näheren Betrachtung unterzogen[9], es habe das von Null verschiedene Eigengewicht mit

$$p_i = \rho \times g \times t \times \Delta k.$$

5 Vgl. Bild 2.2.1.

6 So schreibt beispielsweise LEON BATTISTA ALBERTI in dem dritten Buch *Über das Bauen* seiner *Zehn Büchern über die Baukunst – De re aedificatoria*: „*Dennoch gibt es eines unter den Gewölben allein, und zwar das Kuppelgewölbe, welches eine Gerüstung nicht erfordert, da dieses nicht allein aus Bogen besteht, sondern auch aus Kränzen.*“ (Gedruckte Erstausgabe in lateinischer Sprache: Florenz 1485, Zitat nach der dt. Ausgabe: Theuer, 1912) Mit dieser, zuerst im bautechnologischen Zusammenhang stehenden, Aussage wird das Vorhandensein von steifigkeitsbelegten Bögen, die sich zu geschlossenen, gleichfalls steifigkeitsbelegten Ringen (Kränzen) schließen, als zur Erzielung der Lastabtragung zwingend vorauszusetzen anerkannt.

7 Vgl. Bild 2.2.2.

8 Für Neigungswinkel der Seitenflächen (α) nahe 90° nimmt die Pyramide eine prismatische Form an, ihre Höhe (h) wächst gegenüber der Grundrißseitenlänge (d) ins Unendliche. Die Form der Abtragung der Eigenlast oder einer oberen Rand- (Laternen-) Last geht in die perpendikulare Lastabtragung über. Für den entgegengesetzten Fall geht die Pyramide in ein ebenes Flächentragwerk über, die Abtragung senkrecht zur (Platten-) Ebene angreifender Lasten erfolgt dann ausschließlich über Querkräfte und Biegung (vgl. auch Bild 2.2.3).

9 Vgl. Bild 2.2.3 a.

Die Gewichtskraft (p_i) muß zum Fundament abgeleitet werden, wobei der lotrechte Weg wegen des Fehlens von zur Kraftübertragung heranziehbarem, steifigkeitsbelegtem Materials von vorn herein ausscheidet. Gemäß STEVINschem Kräfteparallelogramm kann aber die Gewichtskraft (p_i) in jedem Angriffspunkt in eine parallel zur Fallinie der Seitenfläche verlaufende Komponente[10] (n_i) und eine orthogonal dazu verlaufende Komponente[11] (q_i) disduziert werden. Die entlang der Fallinie verlaufenden Komponenten (n_i) aus allen jeweils übereinander liegenden linienförmigen Elementen einer Seitefläche können nach unten einander superponierend direkt in das Fundament abgeleitet werden.[12] Die zur Seitenfläche orthogonale Komponente (q_i) hingegen ruft in dem linienförmigen Element Querkräfte und Biegemomente (m_i) als Schnittreaktionen am Balken[13] und an den Endpunkten (A_i, B_i) des herausgeschnittenen Elementes Auflagerreaktionen mit

$$f_i = ½\, q_i \times l_i$$

hervor. Die Richtung dieser Auflagerreaktionen verläuft allerdings noch nicht in einer materialbelegten Achse, die Auflagerreaktionen müssen daher weiter in materialbelegte Richtungen disduziert werden. Diese Zerlegung erfolgt jeweils in einer lotrecht stehenden Ebene, deren Normale identisch mit der Achse des ideell herausgeschnittenen linienförmigen Elementes (A_i, B_i) ist. Die Disduktionsgeraden entsprechen den Schnittlinien dieser Ebene mit den Ebenen der Pyramidenflächen. Damit werden die Stützkräfte (f_{ai}, f_{bi}) in die Kräfte (c_{ai}) und (c_{bi},) deren Wirkungslinien identisch mit den Fallinien auf der Pyramidenfläche (*I*) sind, und in die Kräfte (d_{ai}) und (d_{bi}) auf den Höhenlinien der Pyramidenflächen (*II*) und (*III*) zerlegt.[14] Die Kräfte (c_{ai}) und (c_{bi}) fließen linienflüchtig in ihrer Pyramidenfläche in das Fundament[15], sie superponieren sich jeweils mit den Kräften (n_i). Die Kräfte (d_{ai}) und (d_{bi}) bilden jeweils mit den zugehörigen Komponenten des auf der gleichen Höhe herausgeschnittenen linienförmigen Elementes der Pyramidenfläche (*IIII*) ein Aufhebungspaar.[16] Damit stützen sich die gegenüberliegenden Pyramidenflächen unter Hinzuziehung der an sie angrenzenden Flächen gegenseitig ab.

Bei einem gedanklichen Übergang von der Pyramide zu einem Kreiskegel wird aus der quadratischen Grundfläche der Pyramide ein regelmäßiges n-Eck geformt, das für n gegen unendlich einen Kreis als Grundfläche des Kegels annimmt.[17] Es ist leicht ersichtlich, daß bei diesem Übergang bei gleichbleibender Dimensionierung des Körpers die Länge (l_i) des herausgeschnittenen linienförmigen Elementes mit wachsendem n reduziert wird. Gleichzeitig gehen die längs der Fallinie entstehenden Kräfte infolge der Eigenlast in Meridiankräfte und die entlang der Höhenlinien verlaufenden Kräfte in Breitenkreiskräfte über. Alle beschriebenen Kräfte sind von der Länge (l_i) des linienförmigen Elementes linear, das oben erwähnte Biegemoment allerdings quadratisch, abhängig.

Daher verliert das Biegemoment beim Übergang von der Pyramide zum Kegel mit sich verkürzendem (l_i) seinen Einfluß, womit sich infolge Eigenlast in den ungestörten Bereichen eines

10 Vgl. Bild 2.2.3 b.
11 Vgl. Bild 2.2.3 c.
12 Vgl. Bild 2.2.3 f.
13 Vgl. Bild 2.2.3 d, mit der als Biegemoment dargestellten Schnittreaktion.
14 Vgl. Bild 2.2.3 e.
15 Vgl. Bild 2.2.3 g.
16 Vgl. Bild 2.2.3 h.
17 Damit kann der Kreiskegel als Sonderform der Pyramide angesehen werden.

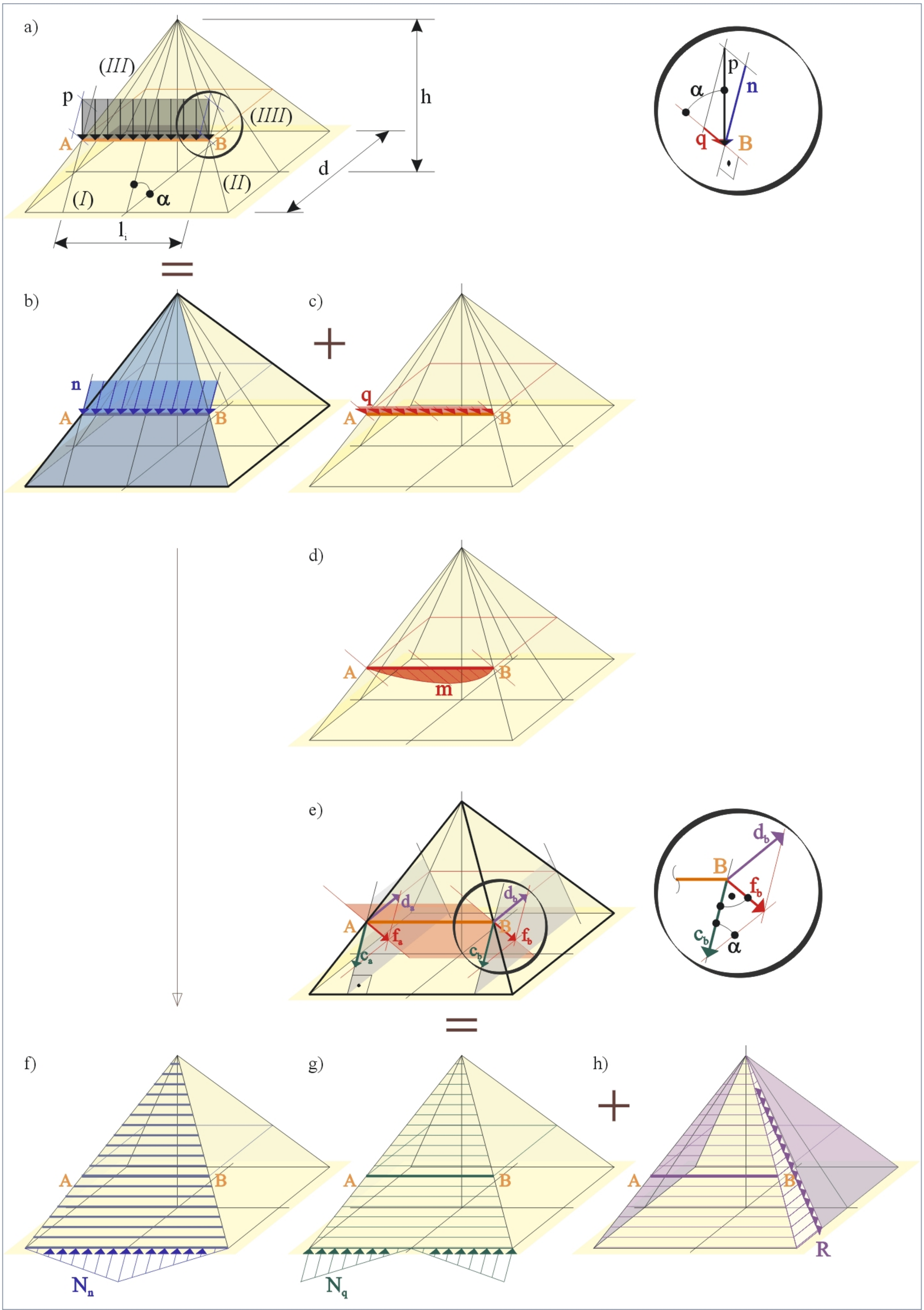


Bild 2.2.3: (Bildunterschrift siehe folgende Seite)

Kegels ein ausschließlich von Längskräften hervorgerufener Spannungszustand einstellt. Dieser Spannungszustand wird Membranspannungszustand genannt, die beiden zugehörigen Spannungen heißen Meridianspannung und Breitenkreisspannung.

Grundsätzlich muß diese Überlegung, vielleicht in vereinfachter Form, den Baumeistern des sächsischen Barock geläufig gewesen sein, zumindest wußten sie zwischen perpendikularer und pyramidaler Lastabtragung zu unterscheiden.

Sie wußten darüber hinaus, daß zumindest für raumüberdeckende Tragwerke die pyramidale Lastübertragung eine vorteilhaftere Ausnutzung der Tragfähigkeit des Materials gegenüber der perpendikularen Lastabtragung gestattet. Als Beweis sei nochmals GEORGE BÄHR zitiert, der in seinem Gutachten zur Kuppel der dresdner Frauenkirche vom 4. August 1733 schreibt: „... *die gantze Figur dieser Kirche Presentieret eine gesetzte Piramide, weil nun ein solches gebäude, so in dieser Figur gefertigt wirdt, vielmehr Stärcke und Krafft zu tragen hat, als andere gebäude so perpenticular auff geführet werden, denn dass* Centrum gravitadis *zertheilet sich sehr viele mahl, ...*“[18]. Speziell dieser Satz aus dem genannten Gutachten ist, wie später noch ausführlich zu zeigen sein wird, der Streitpunkt vieler Gegengutachten und Erwiderungen aus der Feder von BÄHRS Fachkollegen. Dies verdeutlicht, daß der Terminus der pyramidalen Lastabtragung in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts bekannt und den Fachleuten durchaus geläufig war. So äußert sich dazu 1738 GAETANO CHIAVERI, der beispielsweise noch hinzufügt, daß *„... ein Theil besagter Pyramide* (eine Seitenfläche, d. Verf.) *den anderen erhalten muß ...“.*[19] Demzufolge treten zusätzlich zu den Meridiankräften auch Breitenkreiskräfte auf, die so die Seitenflächen der Pyramide halten müssen. Wichtiger noch ist an dieser Stelle die Aussage der bausachverständigen Herren FÜRSTENHOFF, ERNDEL, JOH. BALTH. SCHULZE, KNÖFFEL, CHRISTIAN GRUBSACIUS[20] und GOTTLIEB SIGMUND MÜNCH, indem sie BÄHRS Satz wiedergebend ergänzend formulieren: *„... Darauf zu sagen wird uns erlaubt seyn: wie der Beweiss dieser architectischen Regel zwar seine Richtigkeit habe, zu gegenwärttigen Behuff aber nicht genugsam dienen könne, weil das Inwendige der Piramide,*

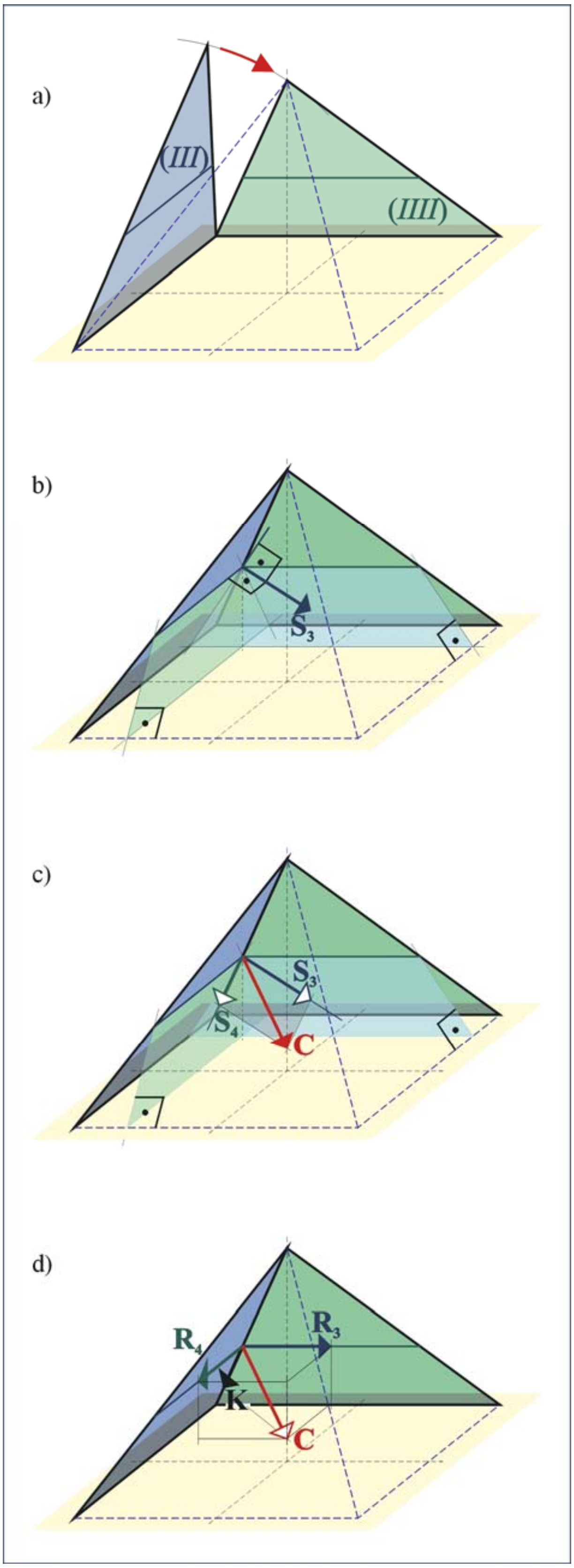
Bild 2.2.3: Modellüberlegung zu dem Prinzip der pyramidalen Lastabtragung, gezeigt anhand einer hohlen Pyramide mit konstanter Wanddicke über quadratischem Grundriß.

a) Ideeller Herausschnitt eines linienförmigen Elementes i mit den Endpunkten (A_i, B_i) und der konstanten Eigenlast (*p*), das Element einer Pyramidenseitenfläche und parallel zu deren Grundrißkante ist, Zerlegung von p in die Komponenten (*n*) und (*q*).
b) In der Ebene der Seitenfläche liegende Eigenlastkomponenten (*n*).
c) Auf der Seitenfläche senkrecht stehende Eigenlastkomponenten (*q*).
d) Abtragung der Komponenten (*q*) mittels Querkräften und Biegemomenten in die „Auflagerpunkte“ (A_i) und (B_i).
e) Disduktion der Auflagerkräfte.
f) Superposition aller in einer Fallinie liegenden Komponenten (n_i) zur tangentialen Stützkraft (N_n) mit $N_{nmax} = p \times h$.
g) Linienflüchtige Verschiebung alle Komponenten zur tangentialen Auflagerkraft (N_q) mit $N_{qmax} = (d \times p \times \cos^2\alpha) / (2 \sin \alpha)$.
h) Bildung von Aufhebungspaaren in jeweils jeder Höhenlinie unter Aktivierung der „Breitenkreiskräfte“ (*R*) mit $R_{max} = (d \times p) / (2 \tan \alpha)$.

[18] Zitiert nach Sponsel, 1893, S. 94. Die Wertung des Gutachtens BÄHRS sowie der Gegenkommentare und Erwiderungen seiner bausachverständigen Zeitgenossen mit Blick auf die dresdner Frauenkirche erfolgt nicht an dieser Stelle, vgl. dazu Abschnitt 4.3 und Abschnitt 4.5.

[19] Zitiert nach Sponsel, 1893, S. 102, vgl. auch Bild 2.2.4.

[20] Vgl. Anhang A.3.



worauff die grosse Last gebauet hohl bleiben müssen ...“.[21] Mit diesem Zitat läßt sich nicht nur nachweisen, daß das Prinzip der pyramidalen Lastabtragung als architektonische Regel eingeführt war, sondern auch als richtig anerkannt wurde. Darüber hinaus wurde bereits damals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es eine Pyramide zur Erzielung einer pyramidalen Lastabtragung unabdingbar hohl sein muß.

Bild 2.2.4: Modellveranschaulichung des Prinzips der pyramidalen Lastabtragung auf der Basis von Gaetano Chiaveris Beschreibung, daß *„... ein Theil besagter Pyramide den andern erhalten muss ...“*.

a) Gedanklich wird auf die bereits in ihrer Position befindliche Seitenfläche (*IIII*) die Seitenfläche (*III*) der Pyramide geklappt, die anderen Seitenflächen sind der Anschauung und der Vereinfachung wegen nicht dargestellt.
b) Die Seitenfläche (*III*) stützt sich an ihren Kanten mit der Kraft (S_3), gezeigt für nur eine Höhenlinie, auf die Seitenfläche (*IIII*). (S_3) verläuft in einer zur Seitenfläche (III) lotrechten, allerdings materialfreien Ebene.
c) Infolge Gleichberechtigung der Seitenflächen existiert analog zu (S_3) auch (S_4). Ihre Resultierende sei die - in das Hohle gehende - Kraft (*C*) und *„... würcket ... gegen den Mittel-Punkt der Pyramide ...“*.
d) Die Disduktion von (*C*) in materialbelegte Richtungen liefert entlang der Pyramidenkante K und in den Höhenlinien (R_3) und (R_4,), die beide bei einer Pyramide über quadratischem Grundriß gleich groß sind. Dazu schreibt bereits Chiaveri: *„... Die äussern Theile von einer jeden viereckigten Pyramiden-Figur ... haben alle gleiche Gewalt ...“*[22].

---

[21] Gutachten der genannten Herren vom 21. Mai 1738 zur Kuppel der dresdner Frauenkirche, zitiert einschließlich der Schreibweise der Namen der Verfasser nach Sponsel, 1893, S. 98.

[22] Alle Zitate stammen aus dem Gutachten von Gaetano Chiaveri aus dem Jahre 1738, zitiert nach Sponsel, 1893, S. 102.

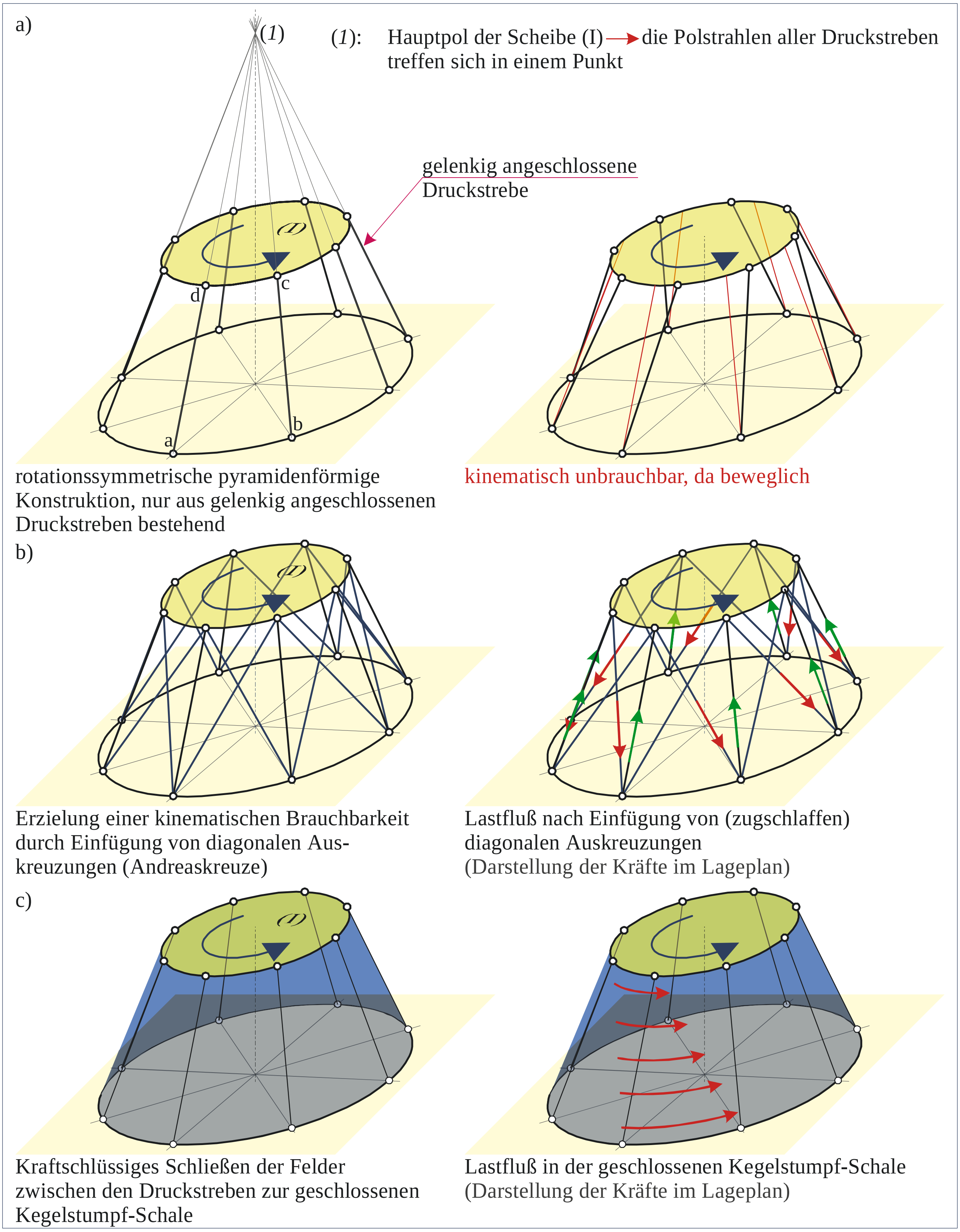


Bild 2.2.5: Abtrag horizontaler Lasten an einer Pyramide (Kegelstumpf).

a) Unbrauchbarkeit der pyramidenförmigen Konstruktion infolge der Beweglichkeit der gegebenen, ausschließlich aus Druckstreben bestehenden, Tragstruktur infolge des Angriffs horizontaler Lasten.
b) Erzielung einer kinematischen Brauchbarkeit durch Einfügung von diagonalen Aus-kreuzungen (zugschlaff = Andreaskreuze, druckschlaff = Windrispen).
c) Schließen der Felder zwischen den Druckstreben zur geschlossenen Kegelstumpf-Schale.

Nebenbei erfüllen pyramidisch wirkende Tragstrukturen eine weitere vorteilhafte Eigenschaft zur Ableitung von Lasten. Tragwerke, in denen rotationssymmetrisch angeordnete Druckstreben für den Abtrag der Vertikallasten sorgen, sind für den Abtrag horizontaler Lasten ungeeignet, da sie beweglich sind.[23] Erst die Herbeiführung einer kinematischen Bestimmtheit der Tragstruktur durch das kraftschlüssige Schließen der Felder zwischen den Druckstreben[24] führt zu einer unbeweglichen und damit brauchbaren Konstruktion. Die fehlende Schubsteifigkeit der Felder kann mit diagonalen Auskreuzungen[25] oder mit der Überführung der Druckstrebenanordnung in einen vollflächigen, schubsteifen Kegelstumpf[26] kompensiert werden.

[23] Vgl. Bild 2.2.5 a, hier mit der besonders plakativen Darstellung der Beweglichkeit der Konstruktion infolge des Angriffs eines Momentes in der Ebene der Scheibe (I).
[24] Beispielsweise Feld a, b, c, d in Bild 2.2.5 a.
[25] Vgl. Bild 2.2.5 b.
[26] Vgl. Bild 2.2.5 c.